CONTENIDO

ALGEBRA DOS

JAVIER MORILLO SANTACRUZ

2008

CAPITULO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Por:Javier Morillo S.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales se conocen varios mètodos, en esta secciòn trabajaremos con tres mètodos a saber: Reducciòn o eliminaciòn, mètodo gràfico y por la Regla de Cramer.

1.1. DOS ECUACIONES DOS VARIABLES

La forma general de las ecuaciones es: $\begin{array}{c} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}$
.
Donde a, b, c, d, e, f son nùmeros reales, x, y son las variables, que tenemos que averiguar su valor.

1.1.1. EJEMPLOS

Vamos a resolver cada ejemplo por los tres mètodos y sacaremos unas conclusiones.
Ejemplo 1 Resolver $\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ x+2y=8 \end{array}$
.
Resolvemos el sistema por ***Reducciòn o Eliminaciòn***
Escojemos una variable para eliminar, elegimos la x, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de x, en este caso el m.c.m(2,1)=2, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de x, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $2\div 2=1$ luego la primera ecuaciòn la multiplicamos por uno
$(1)\ 2x-3y=2$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de x de la segunda ecuaciòn, es decir: $2\div 1=2$

luego la segunda ecuaciòn la multiplicamos por dos
$(2)\ x+2y=8$, la ecuaciones quedarian asì:
$2x-3y=2$
$2x+4y=16$
Como necesitamos eliminar el tèrmino donde esta la variable x, pero estos tèrminos son positivos, para conseguir que los tèrminos queden con signos diferentes , multiplicamos una de las ecuaciones por (-1), elegimos la primera ecuaciòn para luego hacer reducciòn de tèrminos semejantes.

$$\begin{array}{rl} (-1)\ 2x-3y=2 & \quad -2x+3y=-2 \\ 2x+4y=16 & \quad \underline{\ \ 2x+4y=16\ \ } \\ & \qquad\qquad 7y=14 \end{array}$$

Despejando y tenemos: $y=\frac{14}{7}$ simplificando $y=2$
Ahora el valor de y=2 lo reemplazamos en una de las ecuaciones iniciales, queda mas sencilla en la ecuaciòn dos $x+2(2)=8$ destruyendo parentesis $x+4=8$ por transposiciòn de tèrminos $x=8-4$ haciendo operaciones $x=4$ hemos encontrado el valor de las variables $x=4\ y=2$ $o\ (4,2)$

Resolvemos el mismo sistema por ***Regla de Cramer***

Resolver $2x-3y=2$
. $\quad x+2y=8$

Para hallar la variable x hacemos un arreglo de los numeros reales del sistema de ecuaciones $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$

Al arreglo de nùmeros entre barras lo llamamos ***Determinante*** , cuando se observan los nùmeros horizontalmente se llaman ***filas*** , observando el determinante del numerador, en este caso se tienen dos filas, en la fila uno se encuentran los nùmeros 2 y -3, se nombran de

izquierda a derecha, en la fila dos tenemos los nùmeros 8, 2; cuando se observan los nùmeros verticalmente se llaman ***columnas*** , observando el determinante del numerador, en este caso se tienen dos columnas, en la columna uno se encuentran los nùmeros 2 y 8, se nombran de arriba hacia abajo, en la columna dos tenemos los nùmeros -3, 2
Para resolver el determinante multiplicamos los nùmeros en forma diàgonal, luego restamos la diàgonal principal menos la diàgonal secundaria; los nùmeros que ocupan la posiciòn fila uno columna uno (el 2) y la posiciòn fila dos columna dos (el 2) se llama ***Diàgonal principal***, los nùmeros que ocupan la posiciòn fila dos columna uno (el 8) y la posiciòn fila uno columna dos (el -3) se llama ***Diàgonal secundaria***; Como vamos hallar el valor de x en el determinante del numerador en la columna uno ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna dos los coeficientes de la variable y; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(2)-(8)(-3)}{(2)(2)-(1)(-3)} = \frac{4+24}{4+3} = \frac{28}{7} = 4$$

Como vamos hallar el valor de y en el determinante del numerador en la columna dos ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna uno los coeficientes de la variable x; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(8)-(1)(2)}{(2)(2)-(1)(-3)} = \frac{16-2}{4+3} = \frac{14}{7} = 2$$

Resolvemos el mismo sistema por ***Mètodo gràfico***

Resolver $2x - 3y = 2$

. $x + 2y = 8$

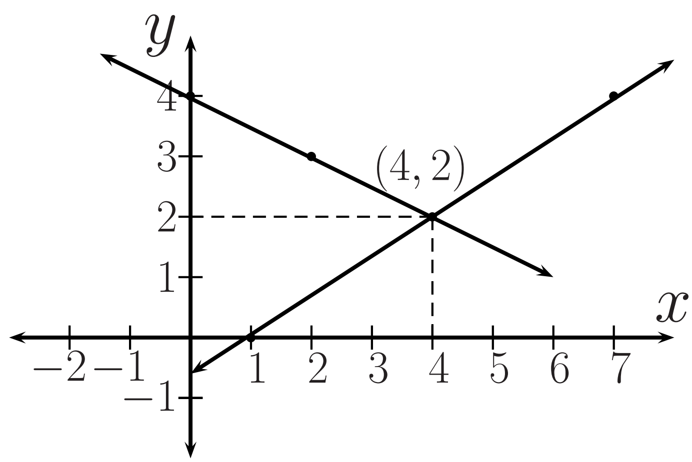
despejamos la variable y en cada ecuaciòn, luego asignamos dos valores a x para obtener dos valores de y, finalmente graficamos las rectas en el plano cartesiano, el punto donde se cortan las rectas es la soluciòn del sistema.

$$y = \frac{2x-2}{3}$$

x	7	1
y	$\frac{2(7)-2}{3} = \frac{14-2}{3} = \frac{12}{3} = 4$	$\frac{2(1)-2}{3} = \frac{2-2}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$$y = \frac{8-x}{2}$$

x	0	2
y	$\frac{8-0}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$\frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$



El ejemplo anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos variables que tiene ***Soluciòn ùnica***

En el mètodo por reducciòn o eliminaciòn nos damos cuenta que tiene soluciòn ùnica, porque hemos encotrado el valor a las dos variables, x=4 y=2.

En el mètodo por la regla de Cramer nos damos cuenta que tiene soluciòn ùnica, porque hemos encotrado el valor a las dos variables, x=4 y=2.

En el mètodo gràfico nos damos cuenta que tiene soluciòn ùnica, porque las dos rectas se cortan en el punto (4,2)

Ejemplo 2 resolver el sistema $\begin{array}{l} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{array}$

.

Resolvemos el sistema por ***Reducciòn o Eliminaciòn***

Escojemos una variable para eliminar, elegimos la y, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de y, en este caso el m.c.m(6,3)=6, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de y, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $6 \div 6 = 1$ luego la primera ecuaciòn la multiplicamos por uno

$(1)\ 4x + 6y = 12$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de y de la segunda ecuaciòn, es decir: $6 \div 3 = 2$
luego la segunda ecuaciòn la multiplicamos por dos
$(2)\ 2x + 3y = -6$, la ecuaciones quedarian asì:

$$4x + 6y = 12$$
$$4x + 6y = -12$$

Como necesitamos eliminar el tèrmino donde esta la variable y, pero estos tèrminos son positivos, para conseguir que los tèrminos queden con signos diferentes , multiplicamos una de las ecuaciones por (-1), elegimos la primera ecuaciòn para luego hacer reducciòn de tèrminos semejantes.

$$\begin{array}{rr} (-1)\ 4x + 6y = 12 & -4x - 6y = -12 \\ 4x + 6y = -12 & 4x + 6y = -12 \\ \hline & 0 = -24 \end{array}$$

El resultado fue 0=-24 esto es una contradicciòn luego el sistema no tiene soluciòn.
Resolvemos el mismo sistema por ***Regla de Cramer***
Resolver $4x + 6y = 12$
. $2x + 3y = -6$
Como vamos hallar el valor de x en el determinante del numerador en la columna uno ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna dos los coeficientes de la variable y; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(12)(3)-(6)(-6)}{(4)(3)-(2)(6)} = \frac{36+36}{12-12} = \frac{72}{0} =$$

$No\ existe$

Como vamos hallar el valor de y en el determinante del numerador en la columna dos ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna uno los coeficientes de la variable x; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(-6)-(2)(12)}{(4)(3)-(2)(6)} = \frac{-24-24}{12-12} =$$

$\frac{-48}{0} = No\ existe$

Como las variables x, y no tienen ningùn valor, el sistema no tiene soluciòn.

Resolvemos el mismo sistema por ***Mètodo gràfico***

Resolver $4x + 6y = 12$

. $2x + 3y = -6$

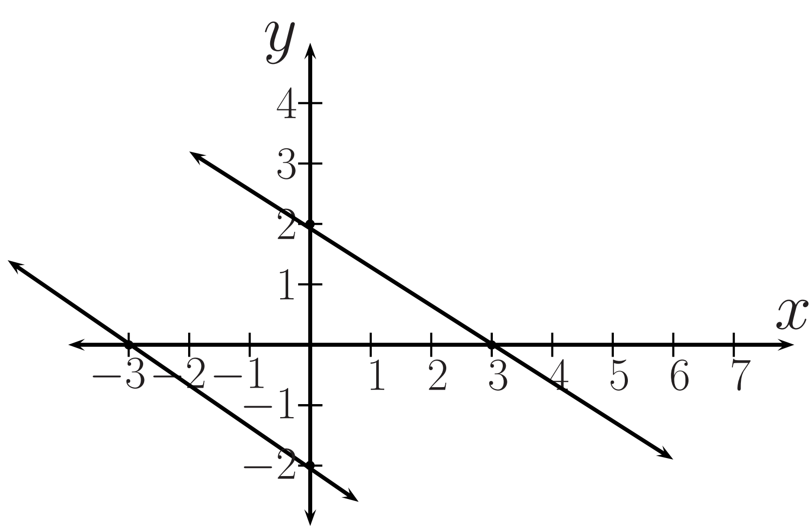
despejamos la variable y en cada ecuaciòn, luego asignamos dos valores a x para obtener dos valores de y, finalmente graficamos las rectas en el plano cartesiano.

$$y = \frac{-4x+12}{6}$$

x	0	3
y	$\frac{-4(0)+12}{6} = \frac{0+12}{6} = \frac{12}{6} = 2$	$\frac{-4(3)+12}{6} = \frac{-12+12}{6} = \frac{0}{6} = 0$

$$y = \frac{-2x-6}{3}$$

x	0	-3
y	$\frac{-2(0)-6}{3} = \frac{0-6}{3} = \frac{-6}{3} = -2$	$\frac{-2(-3)-6}{3} = \frac{6-6}{3} = \frac{0}{3} = 0$



Como puede observar las rectas son paralelas, esto quiere decir que el sistema no tiene soluciòn.
El ejemplo anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos variables que: ***No tiene Soluciòn***
En el mètodo por reducciòn o eliminaciòn nos damos cuenta que no tiene soluciòn, porque se obtiene una contradicciòn 0=-24.
En el mètodo por la regla de Cramer nos damos cuenta que no tiene soluciòn, porque en el numerador se obtiene un valor diferente de cero y en el denominador se obtiene el valor 0, lo cual indica que no existe un valor para x ni para y.
En el mètodo gràfico nos damos cuenta que no tiene soluciòn, porque al ser las rectas paralelas no se cortan en ningùn punto.

Ejemplo 3 resolver el sistema $2x - 3y = -6$
. $-x + \frac{3y}{2} = 3$

Resolvemos el sistema por ***Reducciòn o Eliminaciòn***
Escojemos una variable para eliminar, elegimos la x, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de x, en este caso el m.c.m(2,1)=2, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de x, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $2 \div 2 = 1$ luego la primera ecuaciòn la multiplicamos por uno
$(1)\ 2x - 3y = -6$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de x de la segunda ecuaciòn, es decir: $2 \div 1 = 2$
luego la segunda ecuaciòn la multiplicamos por dos
$(2)\ -x + \frac{3y}{2} = 3$, la ecuaciones quedarian asì:
. $2x - 3y = -6$
$-2x + 3y = 6$
Aplicamos ahora reducciòn de tèrminos semejantes.

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = -6 \\ -2x + 3y = 6 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

El resultado fue 0=0 èsta igualdad nos indica que el sistema tiene infinitas soluciònes.
Resolvemos el mismo sistema por ***Regla de Cramer***
Resolver $2x - 3y = -6$
. $-x + \frac{3y}{2} = 3$

Como vamos hallar el valor de x en el determinante del numerador en la columna uno ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna dos los coeficientes de la variable y; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable x

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 3 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}}=\frac{(-6)(\frac{3}{2})-(3)(-6)}{(2)(\frac{3}{2})-(-1)(-3)}=\frac{-9+9}{3-3}=\frac{0}{0}=$$

$Es\ Indeterminado$

Como vamos hallar el valor de y en el determinante del numerador en la columna dos ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna uno los coeficientes de la variable x; en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y. Hallemos ahora el valor de la variable y

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}}=\frac{(2)(3)-(-1)(-6)}{(2)(\frac{3}{2})-(-1)(-6)}=\frac{6-6}{3-3}=\frac{0}{0}=$$

$Es\ Indeterminado$

Cuando se obtiene 0 sobre 0, esto es una indeterminaciòn, lo cual indica que el sistema tiene infinitas soluciones.

Resolvemos el mismo sistema por ***Mètodo gràfico***

Resolver $\quad 2x-3y=-6$

. $\quad -x+\frac{3y}{2}=3$

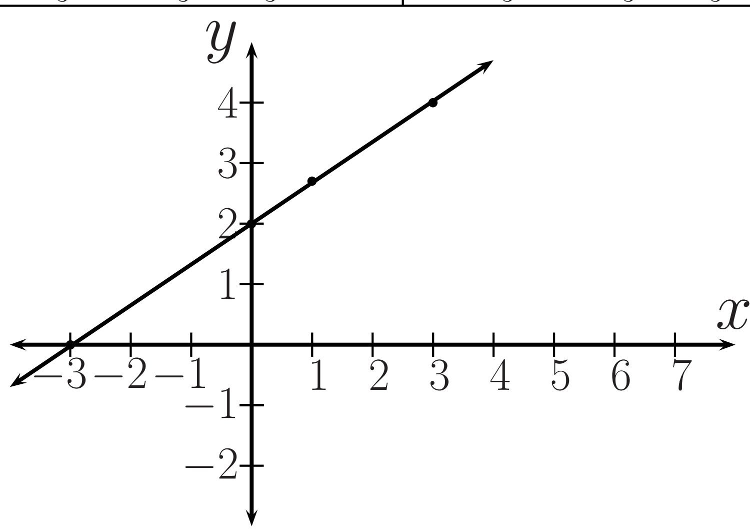
despejamos la variable y en cada ecuaciòn, luego asignamos dos valores a x para obtener dos valores de y, finalmente graficamos las rectas en el plano cartesiano.

$$y = \frac{2x+6}{3}$$

x	0	3
y	$\frac{2(0)+6}{3} = \frac{0+6}{3} = \frac{6}{3} = 2$	$\frac{2(3)+6}{3} = \frac{6+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$$y = \frac{2(3+x)}{3}$$

x	1	-3
y	$\frac{2(3+1)}{3} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}6$	$\frac{2(3-3)}{3} = \frac{2(0)}{3} = \frac{0}{3} = 0$



Como puede observar las rectas coinciden tienen en comun infinitos puntos, esto quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones.
El ejemplo anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos variables que: ***Tiene infinitas Soluciones***
En el mètodo por reducciòn o eliminaciòn nos damos cuenta que tiene infinitas soluciones, porque se obtiene una igualdad 0=0.
En el mètodo por la regla de Cramer nos damos cuenta que tiene infinitas soluciones, porque en el numerador se obtiene el valor cero y en el denominador se obtiene el valor 0, lo cual indica que es una indeterminaciòn
En el mètodo gràfico nos damos cuenta que tiene infinitas soluciones, porque las rectas coinciden.

1.1.2. EJERCICIOS

Resolver cada sistema de ecuaciones, por los tres mètodos: Reducciòn o eliminaciòn, regla de Cramer y mètodo gràfico.

1) $x + y = 9$
. $x + 5y = 25$

2) $x - y = 2$
$3x - 3y = -6$

3) $3x - 2y = 14$ 4) $4x + 6y = 3$

. $6x+3y = -7$ $-2x-3y = \frac{-3}{2}$

1.1.3. APLICACIONES

En las diferentes àreas de la ciencia es necesario resolver sistemas de ecuaciones para dar soluciòn a una situaciòn problemica, realizaremos algunos ejemplos para familiarisarnos con este proceso.

Ejemplo 1 Un concierto produjo 27 000 dolares en la venta de 4 000 entradas. Si las entradas se vendieron a 5 y a 8 dolares, ¿Què cantidad se vendio de cada precio?.
Lo primero es identificar las variables, en este caso son la cantidad de entradas o boletas y su valor, como preguntan es por la cantidad de boletas vendidas llamamos:
x: es el nùmero de boletas o entradas vendidas a 5 dolares.
y:es el nùmero de boletas o entradas vendidas a 8 dolares.
Ahora formamos una una ecuaciòn con la cantidad
$x + y = 4000$ y otra ecuaciòn con el precio
$5x + 8y = 27000$ al resolver el sistema de ecuaciones por cualquier mètodo, se obtiene que: x=1 600, y=2 400, luego
la respuesta es: Se vendieron 1 600 entradas o boletas de 5 dolares y 2 400 boletas o entradas de 8 dolares.

Ejemplo 2 En un almacèn de productos quìmicos, hay una soluciòn de alcohol a $20\,\%$ y otra solucion de alcohol a $50\,\%$ ¿Cuàntos centilitros (cl) de cada una se deben tomar para obtener 24 cl de una soluciòn a $30\,\%$?.
Lo primero es identificar las variables, en èste caso son: la cantidad de centilitros y el porcentaje de alcohol, como preguntan es por la cantidad de centilitros que se debe tomar de cada soluciòn, llamamos:
x:cantidad de soluciòn de alcohol a $20\,\%$
y:cantidad de soluciòn de alcohol a $50\,\%$
formamos dos ecuaciones una con la cantidad de cl de cada soluciòn $x + y = 24$ y la otra ecuaciòn con los porcentajes de alcohol $20\,\%x + 50\,\%y = 24(30\,\%)$ como
$20\,\% = \frac{20}{100}$ la ecuaciòn quedaria asi:
$\frac{20x}{100} + \frac{50y}{100} = \frac{(24)(30)}{100}$ sabemos que para eliminar

fracciones hallamos el m.c.m de los denominadores, en este caso es 100 y al multiplicar cada tèrmino por 100 y simplificando, se obtiene la ecuaciòn dos $20x + 50y = 24(30)$ el sistema de ecuaciones es:

. $x + y = 24$

$20x + 50y = 720)$

al resolver el sistema de ecuaciones por cualquier mètodo, se obtiene que: x=16, y=8, luego

la respuesta es: Para obtener 24 cl de alcohol a $30\,\%$ se debe tomar 16 cl de alcohol a $20\,\%$ y 8 cl de alcohol a $50\,\%$.

Ejemplo 3 En una cafeterìa, se desea mezclar cafè de 3 dolares por kilogramo (kg), con cafè de 4.25 dolares por kilogramo, para producir una mezcla que se venderà a 3.50 dolares por kilogramo. ¿Què cantidad de cada uno deberà usarse para producir 50 kg de la nueva mezcla?.

Lo primero es identificar las variables, en èste caso son: la cantidad de kilogramos de cafè y el precio del cafè, como preguntan es por la cantidad de kilogramos de cafè que se debe tomar de cada uno, llamamos:

x:cantidad de cafè de 3 dolares por kg.

y:cantidad de cafè de 4.25 dolares por kg.

formamos dos ecuaciones una con la cantidad de cafe $x+y = 50$ y la otra ecuaciòn con los precios del cafè $3x+4{,}25y = 50(3{,}50)$ como la ecuacion tiene coeficientes decimales los convertimos a fracciones $4{,}25 = \frac{425}{100}$ la ecuaciòn quedaria asi:

$3x + \frac{425y}{100} = \frac{(50)(350)}{100}$ sabemos que para eliminar fracciones hallamos el m.c.m de los denominadores, en este caso es 100 y al multiplicar cada tèrmino por 100 y simplificando, se obtiene la ecuaciòn dos $300x + 425y = 50(350)$ el sistema de ecuaciones es:

. $x + y = 50$

$300x + 425y = 17500)$

al resolver el sistema de ecuaciones por cualquier mètodo, se obtiene que: x=30, y=20, luego

la respuesta es: Para obtener 50 kg de cafe de 3.50 dolares por kg se debe tomar 30 kg de cafe de 3 dolares por kg y 20 kg de cafe de 4.25

dolares por kg.

1.1.4. EJERCICIOS DE APLICACIÒN

1) Un club organizò una fiesta a la que asistiteon 133 de sus miembros. El ingreso total por concepto de venta de boletas fue 58.450 dolares. El precio de las boletas fue 300 dolares por socio o 650 dolares por socio y su pareja. ¿Cuàntos de ellos asistieron con pareja?.
2) En un almacèn de productos quìmicos, hay una soluciòn de alcohol a $10\,\%$ y otra solucion de alcohol a $40\,\%$ ¿Cuàntos centilitros (cl) de cada una se deben tomar para obtener 24 cl de una soluciòn a $30\,\%$?.
3) Una caja contiene 140 paquetes, con un peso total de 1.92 Kg. Si unos paquetes pesan 12 gramos cada uno, y los demas 16 gramos cada uno, ¿Cuàntos paquetes de cada tipo hay en la caja?.
4) Un rectàngulo tiene 76 cm de perìmetro, si la anchura del rectàngulo mide 2 cm menos que los tres quintos de la longitud, ¿Cuàles son las dimensiones del rectàngulo?.
5) Un inversionista tiene 10 000 dolares para invertirlos. Si invierte una parte al $8\,\%$ y lo demàs al $12\,\%$, ¿Cuànto deberà invertit a cada tasa de interès para obtener el mismo rendimiento si lo hubiera invertido todo al $9\,\%$?.

1.2. SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES .VARIABLES

Vamos a resolver los sistemas de tres ecuaciones con tres variables por el mètodo de reducciòn o eliminaciòn y la regla de Cramer.

1.2.1. EJEMPLO

Resolver $3x - 2y + 4z = 6$

. $2x + 3y - 5z = -8$

. $5x - 4y + 3z = 7$

vamos a resolver el sistema por los dos mètodos:

Reducciòn o eliminaciòn Lo primero que hacemos es enumerar las ecuaciones:

. $3x-2y+4z=6 \ \ (1)$

. $2x+3y-5z=-8 \ \ (2)$

. $5x-4y+3z=7 \ \ (3)$

Ahora escogemos dos de ellas, escogemos la ecuaciòn 1 y 3

. $3x-2y+4z=6 \ \ (1)$

. $5x-4y+3z=7 \ \ (3)$

Escojemos una variable para eliminar, elegimos la y, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de y, en este caso el m.c.m(2,4)=4, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de y, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $4\div 2=2$ luego la primera ecuaciòn la multiplicamos por dos

$(2)\ 3x-2y+4z=6$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de y de la tercera ecuaciòn, es decir: $4\div 4=1$ luego la tercera ecuaciòn la multiplicamos por uno

$(1)\ 5x-4y+3z=7$, la ecuaciones quedarian asì:

$6x-4y+8z=12$

$5x-4y+3z=7$

Como necesitamos eliminar el tèrmino donde esta la variable y, pero estos tèrminos son negativos, para conseguir que los tèrminos queden con signos diferentes , multiplicamos una de las ecuaciones por (-1), elegimos la primera ecuaciòn para luego hacer reducciòn de tèrminos semejantes.

$$(-1)\ 6x-4y+8z=12$$
$$5x-4y+3z=7$$
$$Por\ Reduccion\ de\ terminos$$
$$-6x+4y-8z=-12$$
$$\underline{5x-4y+3z=7}$$
$$-x-5z=-5$$

A esta ecuaciòn $-x-5z=-5$ la llamamos ecuaciòn (4). Para hallar la ecuaciòn (5) escogemos la ecuaciòn que no hemos trabajado, en èste caso la ecuaciòn (2), formando un sistema de ecuaciones con cualquiera de las otras dos ecuciones, eligamos la ecuaciòn (1). El sistemas quedaria asì:

. $2x+3y-5z=-8\ (2)$

. $3x-2y+4z=6\ (1)$

Eliminamos la misma variable del caso anterior, es decir la variable y, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de y, en este caso el m.c.m(2,3)=6, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de y, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $6\div 3=2$ luego la ecuaciòn (2) la multiplicamos por dos $(2)\ 2x+3y-5z=-8$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de y de la ecuaciòn (1), es decir: $6\div 2=3$ luego la ecuaciòn (1) la multiplicamos por tres $(3)\ 3x-2y+4z=6$, la ecuaciones quedarian asì:

$4x+6y-10z=-16\ (2)$

$9x-6y+12z=18\ (1)$

Ahora realizamos reducciòn de tèrminos semejantes.

$$\begin{array}{r} 4x+6y-10z=-16\ \ (2)\\ 9x-6y+12z=18\ \ (1)\\ \hline 13x+2z=2\ \ (5)\end{array}$$

Finalmente resolvemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables con las ecuaciones (4) y (5), es decir:

. $-x-5z=-5\ \ (4)$

. $13x+2z=2\ \ (5)$

Eliminamos una variable elijamos la variable z, luego hallamos el m.c.m de los coeficientes de z, en este caso el m.c.m(5,2)=10, ahora dividimos el m.c.m por cada coeficiente de z, este resultado lo multiplicamos por su respectiva ecuaciòn, es decir $10\div 5=2$ luego la ecuaciòn (4) la multiplicamos por dos $(2)\ -x-5z=-5$ ahora dividimos el m.c.m por el coeficiente de z de la ecuaciòn (5), es decir: $10\div 2=5$ luego la ecuaciòn (5) la multiplicamos por cinco $(5)\ 13x+2z=2$, la ecuaciones quedarian asì:

. $-2x-10z=-10\ (4)$

. $65x+10z=10\ (5)$

Ahora realizamos reducciòn de tèrminos semejantes.

$$\begin{array}{c} -2x - 10z = -10 \quad (4) \\ 65x + 10z = 10 \quad (5) \\ \hline 63x = 0 \end{array}$$

Despejando la variable x tenemos que x=0, el valor de la variable x lo reemplazamos en las ecuaciones (4) o (5), reemplazamos en la ecuaciòn (5) $13(0) + 2z = 2$ realizando operaciones obtenemos $z = 1$ ahora los valores de x=0 y z=1 lo reemplazamos en una de las ecuaciones (1), (2) o (3), reemplazamos en la ecuaciòn (2) $2(0)+3y-5(1) = -8$ realizando operaciones y despejando la variable y, obtenemos que y=-1, luego la soluciòn del sistema es x=0, y=-1, z=1, si desea comprobar que la respuesta es correcta reemplazar los valores en las tres ecuaciones iniciales y tiene que dar como resultado 6 en la primera ecuaciòn, -8 en la segunda ecuaciòn y 7 en la tercera ecuaciòn.

Resolvemos el mismo sistema por ***la regla de Cramer***

. $3x - 2y + 4z = 6$

. $2x + 3y - 5z = -8$

. $5x - 4y + 3z = 7$

Como vamos hallar el valor de x en el determinante del numerador, en la columna uno ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna dos los coeficientes de la variable y, en la columna tres los coeficientes de la variable z.
en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y, en la tercera columna los coeficientes de la variable z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -8 & 3 & -5 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}} =$$

Para resolver determinantes de orden tres (tres filas por tres columnas) se presentan varios mètodos, vamos a resolverlo por una propiedad de los determinantes, que consiste en agregar al determinante las dos primeras columnas para luego multiplicar los tres valores de la diagonal principal y sus paralelas a la diagonal principal, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 6 & -2 & 4 \\ -8 & 3 & -5 \\ 7 & -4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & -2 \\ -8 & 3 \\ 7 & -4 \end{array}}{\left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{array}} =$$

$$= \frac{(6)(3)(3)+(-2)(-5)(7)+(4)(-8)(-4)}{(3)(3)(3)+(-2)(-5)(5)+(4)(2)(-4)}$$

Realizando los productos y luego la suma tanto del numerador como del denominador tenemos:

$$= \frac{54+70+128}{27+50-32} = \frac{252}{45}$$

Ahora multiplicamos los tres valores de la diagonal secundaria y sus paralelas a la diagonal secundaria, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 6 & -2 & 4 \\ -8 & 3 & -5 \\ 7 & -4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & -2 \\ -8 & 3 \\ 7 & -4 \end{array}}{\left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{array}} =$$

$$= \frac{(7)(3)(4)+(-4)(-5)(6)+(3)(-8)(-2)}{(5)(3)(4)+(-4)(-5)(3)+(3)(2)(-2)}$$

Realizando los productos y luego la suma tanto del numerador como del denominador tenemos:

$$= \frac{84+120+48}{60+60-12} = \frac{252}{108}$$

Ahora realizamos la diferencia del resultado de la diagonal principal y sus paralelas y el resultado de la diagonala secundaria y sus paralelas

$$= \frac{252-252}{45-108} = \frac{0}{-63} = 0$$ Luego x=0.

Hallamos de la misma manera el valor de la variable y.
Como vamos hallar el valor de y en el determinante del numerador, en la columna dos ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna uno los coeficientes de la variable x, en la columna tres los coeficientes de la variable z.
en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y, en la tercera columna los coeficientes de la variable z

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & -5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}} =$$

Resolvemos unicamente el determinante del numerador ya que el determinante del denominador ya lo conocemos su valor es -63.
Agregamos al determinante de numerador las dos primeras columnas para luego multiplicar los tres valores de la diagonal principal y sus paralelas a la diagonal principal, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & -5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 6 \\ 2 & -8 \\ 5 & 7 \end{matrix}}{-63} =$$

$$= \frac{(3)(-8)(3)+(6)(-5)(5)+(4)(2)(7)}{-63}$$

Realizando los productos y luego la suma del numerador tenemos:

$$= \frac{-72-150+56}{-63} = \frac{-166}{-63}$$

Ahora multiplicamos los tres valores de la diagonal secundaria y sus paralelas a la diagonal secundaria, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$y = \frac{\left|\begin{matrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & -5 \\ 5 & 7 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 6 \\ 2 & -8 \\ 5 & 7 \end{matrix}}{-63} =$$

$$= \frac{(5)(-8)(4)+(7)(-5)(3)+(3)(2)(6)}{-63}$$

Realizando los productos y luego la suma del numerador tenemos:

$$= \frac{-160-105+36}{-63} = \frac{-229}{-63}$$

Ahora realizamos la diferencia del resultado de la diagonal principal y sus paralelas y el resultado de la diagonala secundaria y sus paralelas

$$= \frac{-166-(-229)}{-63} = \frac{63}{-63} = -1$$ Luego y=-1.

Hallamos de la misma manera el valor de la variable z.

Como vamos hallar el valor de z en el determinante del numerador, en la columna tres ubicamos los tèrminos que no tienen variable, en la columna uno los coeficientes de la variable x, en la columna dos los coeficientes de la variable y.

en el determinante del denominador, en la primera columna ubicamos los coeficientes de la variable x, en la segunda columna ubicamos los coeficientes de la variable y, en la tercera columna los coeficientes de la variable z

$$z = \frac{\left|\begin{matrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & -4 & 7 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{matrix}\right|} =$$

Resolvemos unicamente el determinante del numerador ya que el determinante del denominador ya lo conocemos su valor es -63.

Agregamos al determinante de numerador las dos primeras columnas para luego multiplicar los tres valores de la diagonal principal y sus paralelas a la diagonal principal, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & -4 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{array} =}{-63}$$

$$= \frac{(3)(3)(7)+(-2)(-8)(5)+(6)(2)(-4)}{-63}$$

Realizando los productos y luego la suma del numerador tenemos:

$$= \frac{63+80-48}{-63} = \frac{95}{-63}$$

Ahora multiplicamos los tres valores de la diagonal secundaria y sus paralelas a la diagonal secundaria, para luego sumar los resultados de estos productos, observemos el proceso.

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & -5 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{array} =}{-63}$$

$$= \frac{(5)(3)(6)+(-4)(-8)(3)+(7)(2)(-2)}{-63}$$

Realizando los productos y luego la suma del numerador tenemos:

$$= \frac{90+96-28}{-63} = \frac{158}{-63}$$

Ahora realizamos la diferencia del resultado de la diagonal principal y sus paralelas y el resultado de la diagonala secundaria y sus paralelas

$$= \frac{95-158}{-63} = \frac{-63}{-63} = 1$$ Luego z=1.

1.2.2. EJERCICIOS

Resolver los sistemas de ecuaciones por los dos mètodos: Reducciòn o eliminaciòn y regla de Cramer.

1) $2x+4y+3z=6$ 2) $3x-2y+3z=11$
. $x-3y+2z=-7$ $2x+3y-2z=-5$
. $-x+2y-z=5$ $x+4y-z=-5$

3) $y+z=-4$ 4) $x-Z=2$
. $x-y-z=0$ $x-y+z=-1$
. $-x-y+2z=6$ $x+y+z=-1$

1.2.3. APLICACIONES

Muchos problemas de ciencia y tecnologìa se pueden resolver por sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo En un experimento un zootecnista descubre que necesita una mezcla de alimentos que, contenga 23 gramos(gr) de proteìna , 6.2 gr de grasa y 16 gr de humedad, pero en el mercado unicamente se encuentran mezclas con las siguientes composiciones:

Mezcla	Proteina (%)	Grasa (%)	Humedad (%)
A	20	2	15
B	10	6	10
C	15	5	5

¿Cuàntos gramos de cada mezcla se deberà comprar para obtener la mezcla deseada?.

Tenemos que averiguar cuantos gramos de la mezcla A, de la mezcla B y de la mezcla C tengo que comprar, por lo tanto la variables son A, B y C, con la proteìna que contiene cada mezcla formamos la ecuaciòn (1), con la grasa que contiene cada mezcla formamos la ecuaciòn (2) y con la humedad que contiene cada mezcla formamos la ecuaciòn (3).

. $20\,\%A+10\,\%B+15\,\%C=23\ (1)$

. $2\,\%A+6\,\%B+5\,\%C=6{,}2\ (2)$

. $15\,\%A+10\,\%B+5\,\%C=16\ (3)$

Para facilitar su soluciòn expresamos el porcentaje en forma de fracciòn. . $\frac{20A}{100}+\frac{10B}{100}+\frac{15C}{100}=23\ (1)$

. $\frac{2A}{100}+\frac{6B}{100}+\frac{5C}{100}=6{,}2\ (2)$

. $\frac{15A}{100}+\frac{10B}{100}+\frac{5C}{100}=16\ (3)$

multiplicando cada termino de las ecuaciones por el m.c.m=100 y simplificando tenemos:

. $$20A + 10B + 15C = 2300 \ (1)$$

. $$2A + 6B + 5C = 620 \ (2)$$

. $$15A + 10B + 5C = 1600 \ (3)$$

Al resolver el sistema por cualquier mètodo se obtiene que: A=60, B=50, C=40 Luego la respuesta quedaria asì:Se deben comprar 60 gramos de la mezcla A, 50 gramos de la mezcla B y 40 gramos de la mezcla C.

1.2.4. EJERCICIOS DE APLICACIÒN

1) En un sistema de coordenadas rectangulares, una circunferencia se puede escribir en la forma:

. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Encuentre D, E, F, de manera que la circunferencia pase por los puntos (-2, -1), (-1, -2), y (6, -1).

2) Una dieta especial consiste en capsulas A,B y C. Cada unidad de A tiene 2 gr de grasa, 1 gr de carbohidratos y 3 gr de proteìnas. Cada unidad de B tiene 1 gr de grasa, 2 gr de carbohidratos y 3 gr de proteìnas. Cada unidad de C tiene 3 gr de grasa, 2 gr de carbohidratos y 1 gr de proteìnas. ¿Cuàntas capsulas A, B y C deben usarse si la dieta proporciona exactamente 13 gr de grasa, 11 gr de carbohidratos y 12 gr de proteìnas.?

3) Un fabricante produce televisores de 12, 16 y 19 pulgadas, que requieren: montaje, prueba y empaque. Los televisores de 12 pulgadas requieren 45 minutos de montaje, 30 minutos de prueba y 10 minutos de empaque. Los televisores de 16 pulgadas requieren 1 hora de montaje, 45 minutos de prueba y 15 minutos de empaque. Los televisores de 19 pulgadas requieren 1 hora y media de montaje, 1 hora de prueba y 15 minutos de empaque. Si la linea de montaje trabaja 17 horas 45 minutos por dìa, la linea de prueba trabaja 12 horas y media por dìa, y la linea de empaque trabaja 3 horas 45 minutos por dìa,¿Cuàntos televisores de cada tipo se producen?.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Edgar, Obonaga. *Matemàtica 3, Algebra y Geometrìa* Ed. Pime

[2] Barnet-Uribe *Algebra y Geometrìa 1* Ed. Mac-Graw Hill

[3] Lidice Soraya Padilla *Aventura 8* Ed. Norma

[4] Lidice Soraya Padilla *Desafios 8* Ed. Norma