# CONTENIDO

# GEOMETRIA UNO

JAVIER MORILLO SANTACRUZ

2006

# CAPITULO 1

## ANGULOS Por:Javier Morillo S.

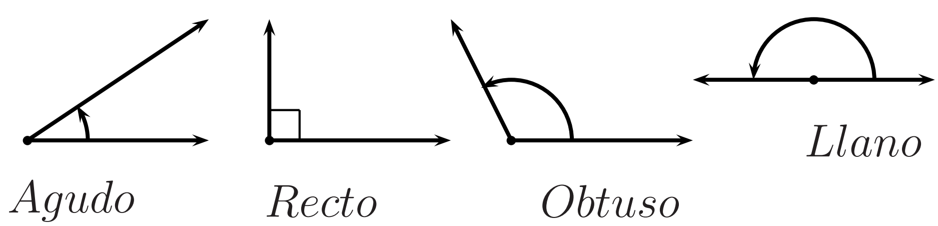
***Àngulo*** Es una parte del plano limitada por dos semirectas que tienen el mismo origen. Las semirectas se llaman ***Lados*** y el origen comun se llama ***Vèrtice***.


## 1.1. CLASIFICACION DE LOS ÀNGULOS

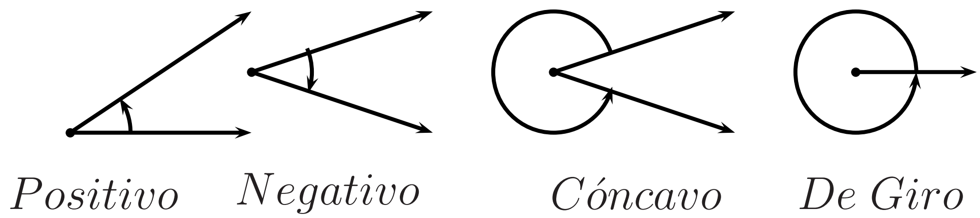
Los àngulos se clasifican segùn su medida y segùn su posiciòn:

### 1.1.1. ÀNGULOS SEGÙN SU MEDIDA

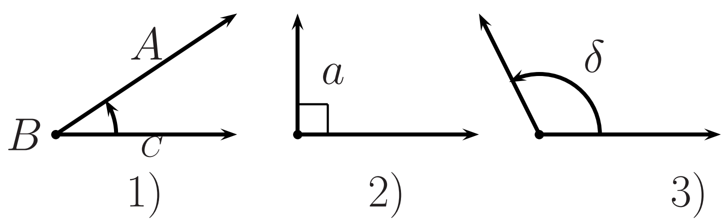
***Àngulo Agudo*** Es el àngulo que mide mas de $0°$ y menos de $90°$
***Àngulo Recto*** Es el àngulo que mide $90°$
***Àngulo Obtuso*** Es el àngulo que mide mas de $90°$ y menos de $180°$
***Àngulo Llano*** Es el àngulo que mide $180°$



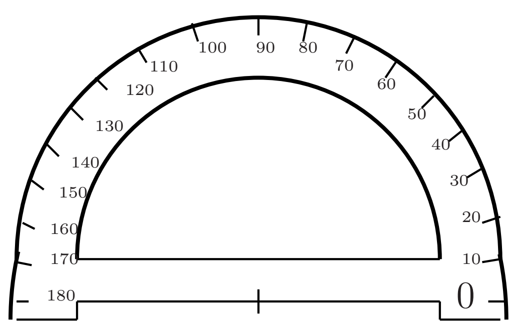
Tenga presente, cuando el lado final gira en sentido contrario de las manecillas del reloj el àngulo es ***Positivo*** y cuando gira en el sentido de las manecillas del reloj el àngulo es ***Negativo***
Si los àngulos son mayores que un àngulo llano, es decir mayores que $180°$ se llaman ***Àngulos còncavos***
***Àngulo de Giro*** Es el àngulo que realiza una vuelta completa, es decir que da un giro de $360°$.




***Para nombrar los àngulos*** Se tienen tres formas:
1) Utilizando tres letras, una en cada lado y la otra en el vèrtice. Se lee àngulo ABC, se simboliza $\sphericalangle ABC$ o tambien $\widehat{ABC}$
2) Escribiendo una letra minuscula entre los lados del àngulo. Se lee àngulo a, se simboliza $\sphericalangle a$ o tambien $\widehat{a}$
3) Escribiendo una letra griega entre los lados del àngulo. Se lee àngulo delta $\delta$ , se simboliza $\sphericalangle\delta$ o tambien $\widehat{\delta}$

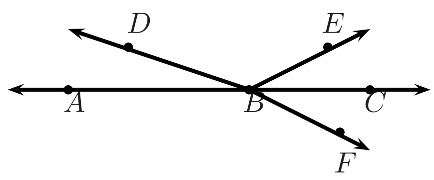



***Para medir àngulos*** empleamos el transportador, el cual esta dividido en 180 partes iguales, cada una de esas partes se llama ***Grado***



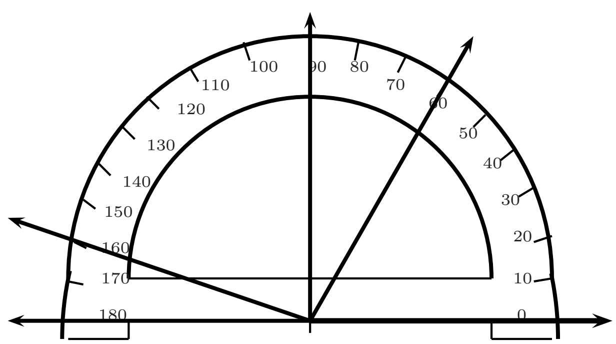

### 1.1.2. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Determinar y leer siete àngulos existentes en la figura.

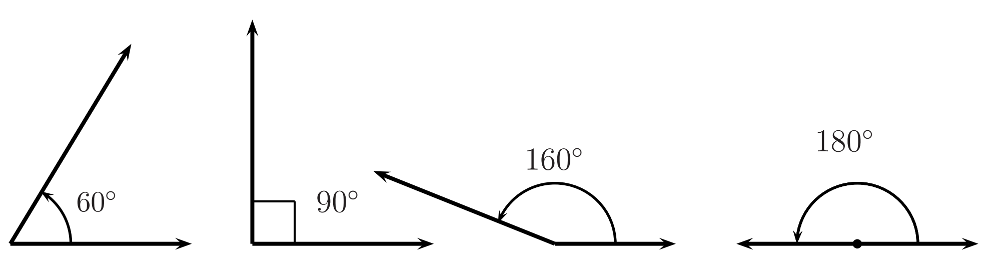



Observando la figura, el àngulo $\widehat{ABD}$ es un àngulo agudo.
el àngulo $\widehat{DBE}$ es un àngulo obtuso.
el àngulo $\widehat{EBC}$ es un àngulo agudo.
el àngulo $\widehat{CBF}$ es un àngulo agudo.
el àngulo $\widehat{ABF}$ es un àngulo obtuso.
el àngulo $\widehat{EBE}$ es un àngulo de giro.
el àngulo $\widehat{ABC}$ es un àngulo llano.

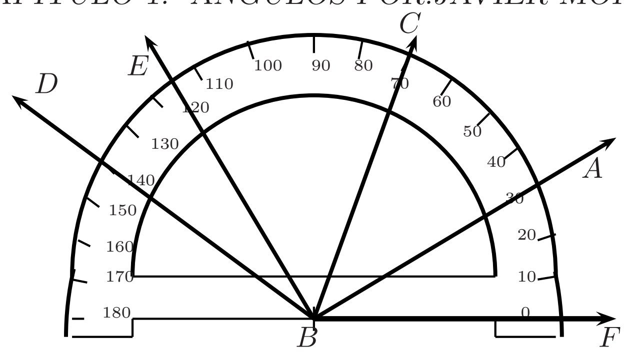
***Ejemplo 2*** Dibuje con la ayuda del transportador, los siguientes àngulos:
a) $60°$ b) $160°$ c) $90°$ d) $180°$
Trazamos los àngulos sobre el transportador.




dibujamos cada àngulo por separado para observarlo mejor:



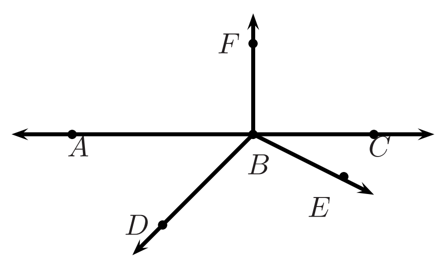

***Ejemplo 3*** Observando la siguiente figura, hallar la medida de los siguientes àngulos y clasificarlos segun su medida: Los angulos $\widehat{FBA}$ , $\widehat{ABD}$ , $\widehat{FBD}$ , $\widehat{CBE}$ , $\widehat{ABA}$ ,




La medida del àngulo $m\widehat{FBA} = 30°$ y es un àngulo agudo.
La medida del àngulo $m\widehat{ABD} = 110°$ y es un àngulo obtuso.
La medida del àngulo $m\widehat{FBD} = 140°$ y es un àngulo obtuso.
La medida del àngulo $m\widehat{CBE} = 45°$ y es un àngulo agudo.
La medida del àngulo $m\widehat{ABA} = 360°$ y es un àngulo de giro.

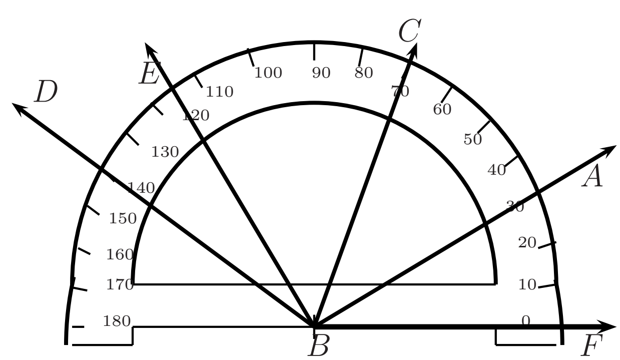
### 1.1.3. EJERCICIOS

1) Determinar y leer siete àngulos existentes en la figura.



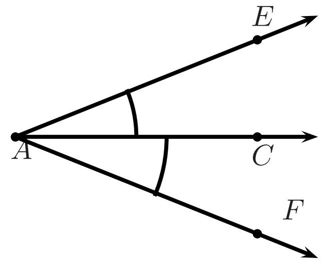

2) Dibuje y mida con la ayuda del transportador, los siguientes àngulos:
a) Un àngulo agudo b) Un àngulo obtuso
c) un àngulo recto d) Un àngulo llano e) un àngulo de giro

3) Observando la siguiente figura, hallar la medida de los siguientes àngulos y clasificarlos segun su medida: Los angulos $\widehat{FBC}$ , $\widehat{ABE}$ , $\widehat{CBD}$ , $\widehat{EBD}$



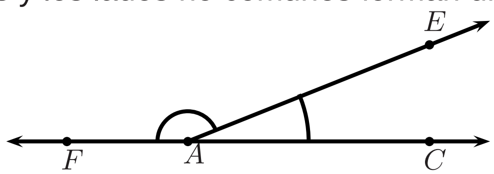
### 1.1.4. ÀNGULOS SEGUN SU POSICIÒN

***Àngulos Consecutivos*** Dos àngulos son consecutivos cuando estàn en un mismo plano, tienen el mismo vèrtice, un lado comùn y los lados no comunes quedan en distinto semiplano respecto del lado comùn.

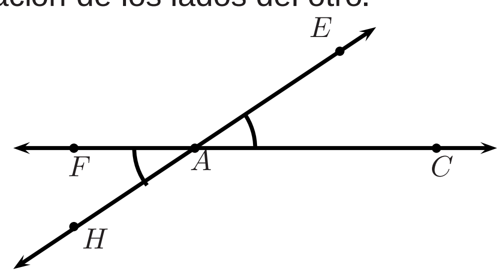



Observe que los àngulos $\widehat{EAC}$ y $\widehat{CAF}$ tiene tienen el mismo vèrtice A, el lado $\overline{AC}$ es comùn a los dos àngulos.

***Àngulos Adyacentes*** Dos àngulos son adyacentes cuando son consecutivos y los lados no comunes forman una lìnea recta.

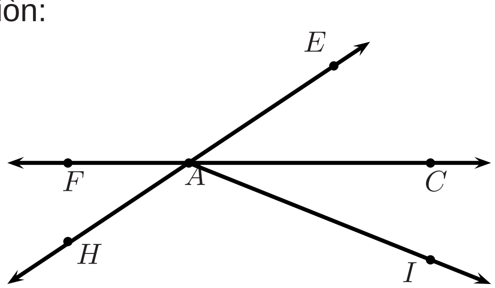



***Àngulos Opuesto por el Vèrtice*** Dos àngulos son opuestos por el vèrtice cuando tienen un vertice en comùn y los lados de uno son prolongaciòn de los lados del otro.




### 1.1.5. EJEMPLOS

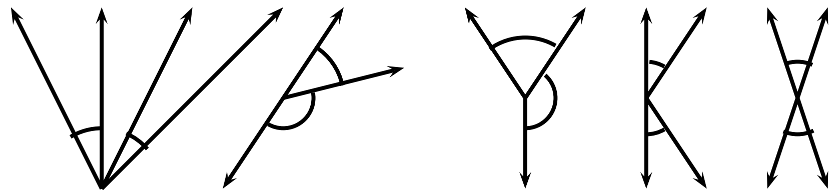
***Ejemplo 1*** En la siguiente figura hallar un par de àngulos segun su posiciòn:



El àngulo $\widehat{HAI}$ y el àngulo $\widehat{IAC}$ son àngulos consecutivos
El àngulo $\widehat{FAH}$ y el àngulo $\widehat{HAC}$ son àngulos adyacentes
El àngulo $\widehat{FAH}$ y el àngulo $\widehat{CAE}$ son àngulos opuesto por el vèrtice

***Ejemplo 2*** Determinar cuales de los siguientes àngulos son: consecutivos, opuestos por el vèrtice o adyacentes.

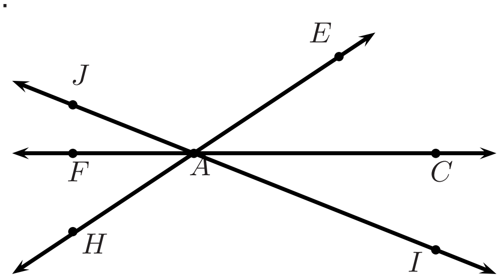
$a)$ $b)$ $c)$ $d)$ $e)$



Teniendo en cuenta las definiciones la figura a) No tiene àngulos segun su posiciòn, en la figura b) los àngulos son adyacentes, en la figura c) los àngulos son consecutivos, en la figura d) No tiene àngulos segun su posiciòn, en la figura e) los àngulos son opuestos por el vèrtice.

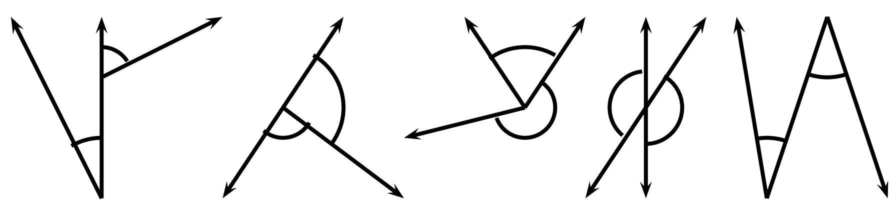
### 1.1.6. EJERCICIOS

1) En la siguiente figura hallar dos pares de àngulos segun su posiciòn:



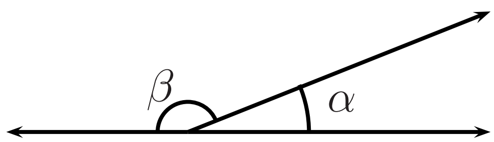

2) Determinar cuales de los siguientes àngulos son:
consecutivos, opuestos por el vèrtice o adyacentes.

$a)$ $b)$ $c)$ $d)$ $e)$



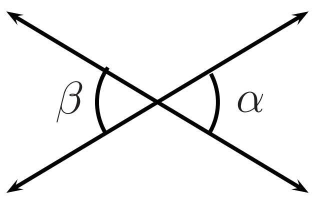
## 1.2. PROPIEDADES DE LOS ÀNGULOS

***Àngulos Adyacentes*** La suma de las medidas de dos àngulos adyacentes es igual a $180°$



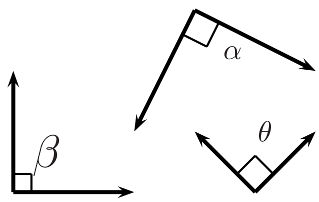

*Si* $\widehat{\beta}$ *y* $\widehat{\alpha}$
*son adyacentes*
*Entonces*
$$m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180^\circ$$

***Àngulos Opuestos Por el Vèrtice*** Dos àngulos opuestos por el vertice son *congruentes*[1].




*Si* $\widehat{\beta}$ *y* $\widehat{\alpha}$
*son opuestos por el vertice*
*Entonces*
$$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta} \text{ o tambien } m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$$

***Àngulos Rectos*** Todos los àngulos rectos son congruentes



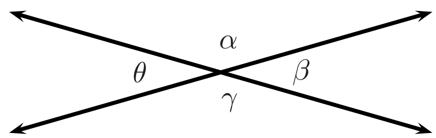

*Si* $\widehat{\beta}$ , $\widehat{\alpha}$ *y* $\theta$
*son Angulos Rectos*
*Entonces*
$$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta} \cong \widehat{\theta}$$
$$\text{o tambien } \; m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta} = m\widehat{\theta}$$

### 1.2.1. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Dos àngulos son adyacentes y uno mide 50 grados màs que el otro. ¿Cuàntos grados mide cada uno?.
Llamamos a uno de los àngulos $\alpha$ y al otro àngulo que mide 50 grados mas que $\alpha$ lo llamamos $\beta$, formando la ecuacion tenemos:
$m\widehat{\beta} = m\widehat{\alpha} + 50^\circ$ por la propiedad de los àngulos adyacentes $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180^\circ$ reemplazando la ecuaciòn anterior en la propiedad $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\alpha} + 50^\circ = 180^\circ$ realizando reducciòn de tèrminos semejantes $2m\widehat{\alpha} + 50^\circ = 180^\circ$
despejando el àngulo $m\widehat{\alpha} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$
reemplazamos el valor del àngulo $m\widehat{\alpha} = 65^\circ$ en la primera ecuaciòn $m\widehat{\beta} = 65^\circ + 50^\circ = 115^\circ$ luego la respuesta es: Los àngulos miden $m\widehat{\alpha} = 65^\circ$ y $m\widehat{\beta} = 115^\circ$

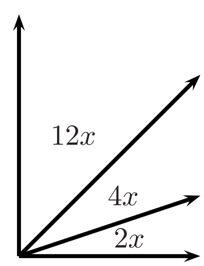
[1]CONGRUENTE significa que tienen la misma medida, se simboliza $\cong$

***Ejemplo 2*** Dos rectas se cortan en un punto formando un àngulo de 70 grados hallar la medida de los otros àngulos que forman las rectas al cortarse.
dibujamos dos rectas que se corten




Asignamos 70 grados al àngulo $m\widehat{\theta} = 70°$, como los àngulos $\widehat{\theta}\ y\ \widehat{\alpha}$ son adyacentes, entonces: $m\widehat{\theta} + m\widehat{\alpha} = 180°$ reemplazando el valor del àngulo $m\widehat{\theta} = 70°$, en la ecuaciòn anterior, tenemos: $70° + m\widehat{\alpha} = 180°$ despejando
$m\widehat{\alpha} = 180° - 70° = 110°$
finalmente como los àngulos $\widehat{\theta}\ y\ \widehat{\beta}$ y los àngulos $\widehat{\alpha}\ y\ \widehat{\gamma}$ son opuestos por el vèrtice, entonnces $m\widehat{\theta} = m\widehat{\beta}$ y $m\widehat{\alpha} = m\widehat{\gamma}$ luego por la propiedad *transitiva*[2] $m\widehat{\beta} = 70°$ y $m\widehat{\gamma} = 110°$ de èsta forma hemos hallado el valor de los àngulos.

***Ejemplo 3*** Un àngulo recto esta dividido en tres partes: 2x, 4x y 12x, hallar el valor de cada àngulo.
Dibujamos el àngulo recto y las partes en que se divide.



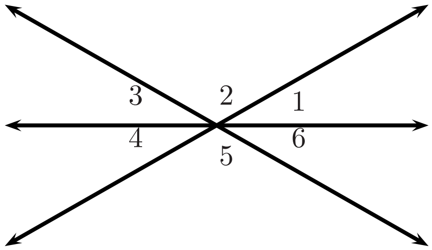

Como el àngulo recto mide 90 grados, luego la suma de los tres àngulos equivale a 90 grados, formando la ecuaciòn, tenemos:
$2x+4x+12x = 90°$ por reducciòn de tèrminos semejantes
$18x = 90°$ despejando la variable x $x = \frac{90°}{18} = 5°$
Reemplazando el valor de x en cada àngulo tenemos:

[2] PROPIEDAD TRANSITIVA Si a=b y b=c entonces a=c

$2x = 2(5°) = 10°$, $4x = 4(5°) = 20°$ y
$12x = 12(5°) = 60°$ Luego el valor de cada àngulo en que se dividiò el àngulo recto es: $10°$ , $20°$ $y$ $60°$

### 1.2.2. EJERCICIOS

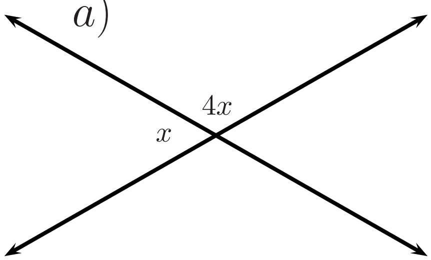
1) En la siguiente figura tres rectas se cortan en el mismo punto.



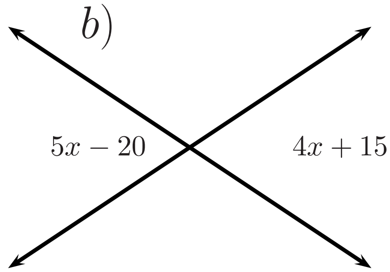

Si $m\widehat{2} = 85°$ y $m\widehat{4} = 30°$ , hallar $m\widehat{1}$ , $m\widehat{3}$ , $m\widehat{5}$ $y$ $m\widehat{6}$

2) Encontrar el valor de x y la medida de cada àngulo en cada una de las siguientes figuras:

$a)$




$b)$




## 1.3. OPERACIONES CON ÀNGULOS

Cuando hay que medir àngulos com mucha precisiòn, como ocurre en astronomìa, en la navegaciòn marìtima y aèrea, es necesario utilizar unidades de medida mas pequeñas que el grado.
La unidad de nedida para medir angulos se llama ***Grado*** los submultiplos del grado son: el minuto y el segundo.
. ***El minuto*** Es el resultado de dividr $1°$ (Un Grado) en 60 partes iguales, se simboliza $1'$ (Un minuto); es decir: $1° = 60'$
. ***El Segundo*** Es el resultado de dividr $1'$ (Un minuto) en 60 partes iguales, se simboliza $1"$ (Un segundo); es decir: $1' = 60"$

### 1.3.1. SUMA DE ÀNGULOS

Para sumar medidas de àngulos colocamos las medidas en forma vertical y sumamos: grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos, si los minutos o segundos se pasan de 60 los convertimos a la unidad inmediatamente superior, es decir que si se paso de 60 minutos restamos 60 minutos y sumamos un grado, ya que un grado equivale a 60 minutos; si se pasa de 120 minutos restamos 120 minutos y sumamos 2 grados, si se pasa de 180 minutos restamos 180 minutos y sumamos 3 grados, asi sucesivamente; realizamos el mismo procedimiento cuando se pasen de 60 segundos.

### 1.3.2. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Sumar $30^\circ\ 40'\ 25''$ con $12^\circ\ 16'\ 46''$
Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos.

$$\begin{array}{rrr} 30^\circ & 40' & 25'' \\ 12^\circ & 16' & 46'' \\ \hline 42^\circ & 56' & 71'' \end{array}$$

Como 71 segundos se paso de 60 segundos, entonces restamos 60 segundos y sumamos un minuto.

$$\begin{array}{rrr} 30^\circ & 40' & 25'' \\ 12^\circ & 16' & 46'' \\ \hline 42^\circ & 56' & 71'' \\ & +1' & -60'' \\ \hline 42^\circ & 57' & 11'' \end{array}$$

Como los minutos y segundos son menores que 60,la respuesta es: $42^\circ\ 57'\ 11''$

***Ejemplo 2*** Sumar $50^\circ\ 54'\ 20''$ con $22^\circ\ 37'\ 30''$ Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos.

$$\begin{array}{rrr} 50^\circ & 54' & 20'' \\ 22^\circ & 37' & 30'' \\ \hline 72^\circ & 91' & 50'' \end{array}$$

Como 91 minutos se paso de 60 minutos, entonces restamos
60 minutos y sumamos un grado.

$$\begin{array}{rrr} 50^\circ & 54' & 20'' \\ 22^\circ & 37' & 30'' \\ \hline 72^\circ & 91' & 50'' \\ +1^\circ & -60' & \\ \hline 73^\circ & 31' & 50'' \end{array}$$

Como los minutos y segundos son menores que 60,la respuesta es:
$73° \ 31' \ 50"$

***Ejemplo 3*** Sumar $56° \ 38' \ 49"$ con $21° \ 47' \ 52"$ Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos.

$$\begin{array}{rrr} 56° & 38' & 49" \\ 21° & 47' & 52" \\ \hline 77° & 85' & 101" \end{array}$$

Como 101 segundos se paso de 60 segundos, entonces restamos 60 segundos y sumamos un minuto.

$$\begin{array}{rrr} 56° & 38' & 49" \\ 21° & 47' & 52" \\ \hline 77° & 85' & 101" \\ & +1' & -60" \\ \hline 77° & 86' & 41" \end{array}$$

Como 86 minutos se paso de 60 minutos, entonces restamos
60 minutos y sumamos un grado.

$$\begin{array}{rrr} 56° & 38' & 49" \\ 21° & 47' & 52" \\ \hline 77° & 85' & 101" \\ & +1' & -60" \\ \hline 77° & 86' & 41" \\ +1° & -60' & \\ \hline 78° & 26' & 41" \end{array}$$

Como los minutos y segundos son menores que 60,la respuesta es:
$78° \ 26' \ 41"$

### 1.3.3. EJERCICIOS

Sumar los siguientes àngulos

1) $\left(10° \ 18' \ 39"\right) + \left(28° \ 22' \ 54"\right)$
2) $\left(18° \ 48' \ 21"\right) + \left(30° \ 37' \ 14"\right)$
3) $\left(50° \ 37' \ 49"\right) + \left(35° \ 42' \ 51"\right)$
4) $\left(20° \ 51' \ 43"\right) + \left(32° \ 44' \ 55"\right)$

### 1.3.4. DIFERENCIA DE ÀNGULOS

Para restar medidas de àngulos procedemos de la misma manera como lo hicimos para la suma, teniendo en cuenta que el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, es decir, observando la medida de los grados se determina cuàl es el minuendo y cuàl el sustraendo, si en los segundos el minuendo es menor que el sustraendo, sumamos 60 segundos y restamos un minuto, si esto sucede en los minutos sumamos 60 minutos y restamos un grado.

### 1.3.5. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Restar $20^\circ\ 24'\ 48"$ y $40^\circ\ 38'\ 27"$
Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos. En èste caso el minuendo es el àngulo que tiene de medida 40 grados y el sustraendo es el àngulo que tiene de medida 20 grados

$$\begin{array}{lll} 40^\circ\ 38'\ 27" & Minuendo \\ \underline{20^\circ\ 24'\ 48"} & Sustraendo \end{array}$$

Como 27 segundos es menor que 48 segundos, sumamos 60 segundos y restamos un minuto.

$$\begin{array}{ll} \underline{40^\circ\ 37'\ \ 87"} & Minuendo \\ \quad\ \ -1' + 60" & \\ 40^\circ\ 38'\ \ 27" & \\ \underline{20^\circ\ 24'\ \ 48"} & Sustraendo \end{array}$$

Como los minutos y segundos del minuendo son mayores que el sustraendo, procedemos a restarlos.

$$\begin{array}{ll} \underline{40^\circ\ 37'\ \ 87"} & Minuendo \\ \quad\ \ -1' + 60" & \\ 40^\circ\ 38'\ \ 27" & \\ \underline{20^\circ\ 24'\ \ 48"} & Sustraendo \\ 20^\circ\ 13'\ \ 39" & \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $20^\circ\ 13'\ 39"$

***Ejemplo 2*** Restar $15^\circ\ 48'\ 18"$ y $20^\circ\ 21'\ 34"$
Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos. En èste caso el minuendo es el àngulo que tiene de medida 20 grados y el sustraendo es el àngulo que tiene de medida 15 grados

$$\begin{array}{rrrl} 20^\circ & 21' & 34'' & Minuendo \\ 15^\circ & 48' & 18'' & Sustraendo \\ \hline \end{array}$$

Como 21 minutos es menor que 48 minutos, sumamos 60 minutos y restamos un grado.

$$\begin{array}{rrrl} 19^\circ & 81' & 34'' & Minuendo \\ \hline -1^\circ & +60' & & \\ 20^\circ & 21' & 34'' & \\ 15^\circ & 48' & 18'' & Sustraendo \\ \hline \end{array}$$

Como los minutos y segundos del minuendo son mayores que el sustraendo, procedemos a restarlos.

$$\begin{array}{rrrl} 19^\circ & 81' & 34'' & Minuendo \\ \hline -1^\circ & +60' & & \\ 20^\circ & 21' & 34'' & \\ 15^\circ & 48' & 18'' & Sustraendo \\ \hline 4^\circ & 33' & 16'' & \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $4^\circ\ 33'\ 16''$

***Ejemplo 3*** Restar $25^\circ\ 42'\ 18''$ y $12^\circ\ 57'\ 36''$

Los ubicamos uno debajo del otro de manera que coincidan grados con grados minutos con minutos y segundos con segundos. En èste caso el minuendo es el àngulo que tiene de medida 25 grados y el sustraendo es el àngulo que tiene de medida 12 grados

$$\begin{array}{rrrl} 25^\circ & 42' & 18'' & Minuendo \\ 12^\circ & 57' & 36'' & Sustraendo \\ \hline \end{array}$$

Como 18 segundos es menor que 36 segundos, sumamos 60 segundos y restamos un minuto.

$$\begin{array}{rrrl} 25^\circ & 41' & 78'' & Minuendo \\ \hline & -1' & +60'' & \\ 25^\circ & 42' & 18'' & \\ 12^\circ & 57' & 36'' & Sustraendo \\ \hline \end{array}$$

Como 41 minutos es menor que 57 minutos, sumamos 60 minutos y restamos un grado.

$$\begin{array}{rrrl}
24^\circ & 101' & 78" & \textit{Minuendo} \\
\hline
-1^\circ & +60' & & \\
25^\circ & 41' & 78" & \\
\hline
 & -1' & +60" & \\
25^\circ & 42' & 18" & \\
12^\circ & 57' & 36" & \textit{Sustraendo} \\
\hline
\end{array}$$

Como los minutos y segundos del minuendo son mayores que el sustraendo, procedemos a restarlos.

$$\begin{array}{rrrl}
24^\circ & 101' & 78" & \textit{Minuendo} \\
\hline
-1^\circ & +60' & & \\
25^\circ & 41' & 78" & \\
\hline
 & -1' & +60" & \\
25^\circ & 42' & 18" & \\
12^\circ & 57' & 36" & \textit{Sustraendo} \\
\hline
12^\circ & 44' & 42" &
\end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $12^\circ\ 44'\ 42"$

### 1.3.6. EJERCICIOS

Restar los siguientes àngulos

1) $(20^\circ\ 37'\ 51")$ , $(12^\circ\ 11'\ 58")$
2) $(22^\circ\ 49'\ 24")$ , $(30^\circ\ 42'\ 38")$
3) $(50^\circ\ 12'\ 36")$ , $(25^\circ\ 48'\ 52")$
4) $(10^\circ\ 54'\ 38")$ , $(58^\circ\ 35'\ 24")$

### 1.3.7. MULTIPLICACION DE ÀNGULOS

Para multiplicar medidas de àngulos, multiplicamos el nùmero real por los segundos, minutos y grados, si los segundos se pasan de 60, restamos 60 segundos y sumamos un minuto, si los segundos se pasan de 120, restamos 120 segundos y sumamos 2 minutos, si los segundos se pasan de 180, restamos 180 segundos y sumamos 3 minutos, asi sucesivamente, es decir que buscamos un multiplo de 60 que se aproxime o coincida con el valor obtenido; de la misma manera procedemos con los minutos, si se pasan de 60, restamos 60 mintuos y sumamos un grado, etc.

### 1.3.8. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Multiplicar $3(20^\circ\ \ 15'\ 48")$
Multiplicamos 3 por los segundos, por los minutos y por los grados:

$$\begin{array}{rrr} 20^\circ & 15' & 48" \\ & & 3 \\ \hline 60^\circ & 45' & 144" \end{array}$$

Como 144 segundos se paso de 60, el multiplo de 60 que se aproxima a 144 es 120, entonces restamos 120 segundos y sumamos dos minutos por que 2(60)=120.

$$\begin{array}{rrr} 20^\circ & 15' & 48" \\ & & 3 \\ \hline 60^\circ & 45' & 144" \\ & +2' & -120" \\ \hline 60^\circ & 47' & 24" \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $60^\circ\ 47'\ 24"$

***Ejemplo 2*** Multiplicar $8(15^\circ\ \ 36'\ 12")$
Multiplicamos 8 por los segundos, por los minutos y por los grados:

$$\begin{array}{rrr} 15^\circ & 36' & 12" \\ & & 8 \\ \hline 120^\circ & 288' & 96" \end{array}$$

Como 96 segundos se paso de 60, el multiplo de 60 que se aproxima a 96 es 60, entonces restamos 60 segundos y sumamos un minuto.

$$\begin{array}{rrr} 15^\circ & 36' & 12" \\ & & 8 \\ \hline 120^\circ & 288' & 96" \\ & +1' & -60" \\ \hline 120^\circ & 289' & 36" \end{array}$$

Observe que 289 minutos se paso de 60, el multiplo de 60 que se aproxima a 289 es 240, entonces restamos 240 minutos y sumamos 4 grados por que 4(60)=240.

$$\begin{array}{r}
15^\circ \ 36' \ \ 12" \\
8 \\
\hline
120^\circ 288' \ \ 96" \\
+1' - 60" \\
\hline
120^\circ 289' \ \ 36" \\
+4' - 240" \quad \\
\hline
124^\circ \ 49' \ \ 36"
\end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $124^\circ \ 49' \ 36"$

### 1.3.9. EJERCICIOS

Multiplicar los siguientes àngulos

1) $7(20^\circ \ 37' \ 51")$ 2) $6(15^\circ \ 28' \ 43")$
3) $9(13^\circ \ 24' \ 37")$ 4) $8(11^\circ \ 35' \ 52")$

### 1.3.10. DIVISIÒN DE ÀNGULOS

Para dividir medidas de àngulos por un nùmero real, dividimos los grados por el nùmero real, el residuo de los grados lo convertimos a minutos, la suma de los minutos se divide por el nùmero real, el residuo de los minutos lo convertimos a segundos, la suma de los segundos se divide por el nùmero real.

### 1.3.11. EJEMPLO

Dividir $(20^\circ \quad 34' \quad 47") \div 3$

$$\begin{array}{r|l}
20^\circ & 3 \\
\cline{2-2}
2^\circ & 6^\circ
\end{array}$$

Como el residuo es 2 grados, al convetirlo a minutos se obtiene 120 minutos $(1^\circ = 60')$ ahora los 120 minutos se suman con 34 minutos, (120+34=154 minutos), luego los 154 minutos se dividen por 3.

$$\begin{array}{r|l}
20^\circ & 3 \\
\cline{2-2}
2^\circ & 6^\circ
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
154' & 3 \\
\cline{2-2}
04 & 51' \\
1' &
\end{array}$$

Como el residuo es 1 minuto, $\left(1' = 60"\right)$ ahora los 60 segundos se suman con 47 segundos, (60+47=107 segundos), luego los 107 segundos se dividen por 3, si se obtienen cifras decimales trabajamos con dos cifras redondeando la tercera cifra decimal.

$$\begin{array}{l|l} 20^\circ & 3 \\ \hline 2^\circ & 6^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 154' & 3 \\ \hline 04 & 51' \\ 1' & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 107" & 3 \\ \hline 17 & 35{,}666" \\ 20 & \\ 20 & \\ 20 & \\ 2" & \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $6^\circ\ 51'\ 35{,}67"$

## 1.3.12. EJERCICIOS

Dividir los siguientes àngulos

1) $\left(20^\circ\ 37'\ 51"\right) \div 7$ 2) $\left(15^\circ\ 28'\ 43"\right) \div 4$

3) $\left(13^\circ\ 24'\ 37"\right) \div 5$ 4) $\left(11^\circ\ 35'\ 52"\right) \div 9$

## 1.3.13. CONVERSION A GRADOS MINUTOS Y SEGUNDOS

Para convertir de una unidad menor a una mayor, se divide consecutivamente por 60; para convertir de una unidad mayor a una menor, es decir que tiene cifras decimales, multiplicamos las cifras decimales consecutivamente por 60.

## 1.3.14. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Convertir a grados minutos y segundos $24342"$
Iniciamos convirtiendo 24342 segundos a minutos, dividimos por 60

$$\begin{array}{l|l} 24342" & 60 \\ \hline 034 & \\ \ 342 & 405' \\ \ \ 42" & \end{array}$$

Ahora 405 minutos lo dividimos por 60 para realizar la converciòn a grados

$$\begin{array}{l|l} 24342" & 60 \\ \hline 034 & \\ \ 342 & \begin{array}{l|l} 405' & 60 \\ \hline 45' & 6^\circ \end{array} \\ \ \ 42" & \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $6^\circ \; 45' \; 42''$

***Ejemplo 2*** Convertir a grados minutos y segundos $342'$ Iniciamos convirtiendo 342 minutos a grados, dividimos por 60

$$\begin{array}{r|l} 342' & 60 \\ \cline{2-2} 42' & 5^\circ \end{array}$$

Luego el resultado de la operacion es: $5^\circ \; 42' \; 0''$

***Ejemplo 3*** Convertir a grados minutos y segundos $28{,}37^\circ$
Dejamos la parte entera 28 grados y multiplicamos la parte decimal por 60, es decir (0.37)(60)=22.20, dejamos la parte entera 22 minutos y multiplicamos la parte decimal por 60, es decir (0.20)(60)=12 segundos. Luego el resultado de la operacion es: $28^\circ \; 22' \; 12''$

***Ejemplo 4*** Convertir a segundos $28^\circ \; 22' \; 12''$
Convertimos 28 grados a segundos y 22 minutos a segundos, sabemos que, para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica, es decir $(28)(3600) = 100800''$ (por que un grado equivale a 3600 segundos), y $(22)(60) = 1320''$ , sumando todos los segundos:
$100800'' + 1320'' + 12'' = 102132''$ , luego la respuesta seria $28^\circ \; 22' \; 12'' = 102132''$

***Ejemplo 5*** Convertir a minutos $28^\circ \; 22' \; 12''$
Convertimos 28 grados a minutos y 12 segundos a minutos, sabemos que, para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica, es decir $(28)(60) = 1680'$ (por que un grado equivale a 60 minutos), y para convertir de una unidad menor a una mayor se divide, es decir: $(12) \div (60) = 0{,}2'$ , sumando todos los minutos:
$1680' + 22' + 0{,}2' = 1702{,}2'$ , luego la respuesta seria $28^\circ \; 22' \; 12'' = 1702{,}2'$

***Ejemplo 6*** Convertir a grados $28^\circ \; 22' \; 12''$
Convertimos 12 segundos a minutos, sabemos que, para convertir de una unidad memor a una mayor se divide, es decir
$(12) \div (60) = 0{,}2'$ (por que un minuto equivale a 60 segundos), ahora sumamos $22' + 0{,}2' = 22{,}2'$ ,luego convertimos 22.2 minutos a grados $(22{,}2) \div (60) = 0{,}37^\circ$ (por que un grado equivale a 60 minutos), sumando los grados:
$28^\circ + 0{,}37^\circ = 28{,}37^\circ$ , luego la

respuesta seria $28^\circ\ 22'\ \ 12'' = 28{,}37^\circ$

### 1.3.15. EJERCICIOS

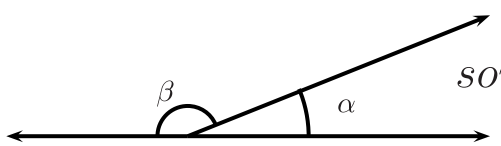
Convertir las siguientes medidas de àngulos

1) $51245''$ a grados, minutos y segundos.
2) $28452'$ a grados, minutos y segundos.
3) $32{,}87^\circ$ a grados, minutos y segundos.
4) $11^\circ\ 35'\ 52''$ a segundos
5) $32^\circ\ 45'\ \ 37''$ a minutos
6) $31^\circ\ \ 43'\ 47''$ a grados.

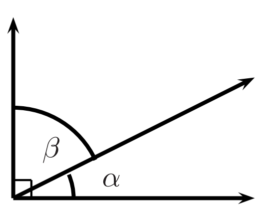
### 1.3.16. ÀNGULOS Y LINEAS ESPECIALES

***Àngulos Complementarios*** Dos àngulos son complementarios si y sòlo si la suma de sus medidas es igual a 90 grados. Cuando se va a encontrar àngulos complementarios que tienen grados mimutos y segundos, 90 grados se descompone asì $89^\circ\ \ 59'\ 60''$

***Àngulos Suplementarios*** Dos àngulos son suplementarios si y sòlo si la suma de sus medidas es igual a 180 grados. Cuando se va a encontrar àngulos suplementarios que tienen grados mimutos y segundos, 180 grados se descompone asì $179^\circ\ \ 59'\ 60''$

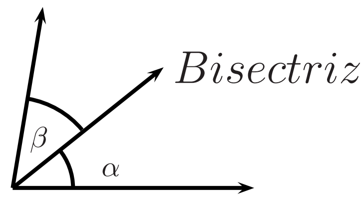



$\widehat{\beta}\ y\ \widehat{\alpha}$
$son\ Suplementarios$
$si\ y\ sólo\ si$
$m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180^\circ$




$\widehat{\beta}\ y\ \widehat{\alpha}$
$son\ Complementarios$
$si\ y\ sólo\ si$
$m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 90^\circ$

***Bisectriz de un àngulo*** La Bisectriz de un àngulo es una semirecta que tiene: su origen en el vèrtice del àngulo y divide al àngulo en dos àngulos congruentes.




$$\widehat{\beta} \cong \widehat{\alpha}$$

$$Luego$$

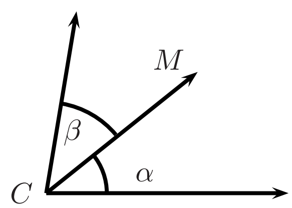
$$m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$$

### 1.3.17. EJEMPLOS

***Ejemplo 1*** Hallar el complemento de $40^\circ$
Como la suma de las medidas de los angulos es 90 grados, a 90 grados le restamos 40 grados, es decir $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ Luego el complemento de $40^\circ$ es $50^\circ$

***Ejemplo 2*** Hallar el suplemento de $60^\circ$
Como la suma de las medidas de los angulos es 180 grados, a 180 grados le restamos 60 grados, es decir $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
Luego el suplemento de $60^\circ$ es $120^\circ$

***Ejemplo 3*** En la siguiente figura:




$$\overline{CM}\ es\ Bisectriz\ de\ \widehat{C}$$

$$m\widehat{C} = 80^\circ$$

$$Calcular\ m\widehat{\alpha}$$

Como la bisectriz divide al àngulo en dos partes iguales, entonces la medida del àngulo $m\alpha = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

***Ejemplo 4*** La medida de un àngulo es igual $\frac{2}{3}$ de su complemento. ¿Cuanto mide el àngulo?
Llamamos $\widehat{\alpha}\ y\ \widehat{\beta}$ los àngulos complementarios, llamamos al àngulo $\widehat{\alpha}$ el àngulo buscado, luego $m\widehat{\alpha} = \frac{2m\widehat{\beta}}{3}$ por definiciòn de àngulos complementarios
$m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 90^\circ$ reemplazando el valor del àngulo $\widehat{\alpha}$ en la ecuaciòn anterior, tenemos: $\frac{2m\widehat{\beta}}{3} + m\widehat{\beta} = 90^\circ$ hallamos el m.c.m de los denominadores de cada tèrmino, en este caso es 3, ahora multiplicamos cada tèrmino por 3

$$\frac{(3)2m\widehat{\beta}}{3} + 3m\widehat{\beta} = (3)90^\circ$$

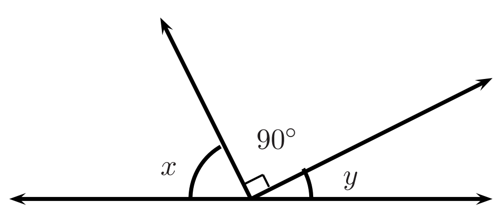
realizando operaciones y simplificando $2m\widehat{\beta}+3m\widehat{\beta} = 270°$
realizando reducciòn de tèrminos semejantes $5m\widehat{\beta} = 270°$
despejando la variable $m\widehat{\beta} = \frac{270°}{5} = 54°$ reemplazando el valor del àngulo en la ecuaciòn $m\widehat{\alpha} = \frac{2m\widehat{\beta}}{3}$ tenemos
$m\widehat{\alpha} = \frac{(2)(54°)}{3}$ realizando operaciones
$m\widehat{\alpha} = \frac{108°}{3} = 36°$ luego el àngulo buscado es:
$m\widehat{\alpha} = 36°$

### 1.3.18. EJERCICIOS

1) Encontrar el complemento de los siguientes angulos:
a) $51°$ b) $28°\ 22'\ 12"$
2) Encontrar el suplemento de los siguientes angulos:
a) $67°$ b) $125°\ 32'\ 47"$

### 1.3.19. APLICACIONES

1) ¿Cual es la medida de un àngulo cuya medida es el doble de su complemento?
2) Dos àngulos son suplementarios, uno de ellos es 30 grados mayor que el otro, encontrar la medida de cada àngulo.
3) Dos àngulos son suplementarios y la medida de uno de ellos es $\frac{4}{5}$ del otro. ¿Cuànto mide cada uno?
4) Explicar por que los àngulos $\widehat{x}$ , $\widehat{y}$ son àngulos complementarios.



# BIBLIOGRAFÍA

[1] Edgar, Obonaga. *Matemàtica 4, Algebra y Geometrìa* Ed. Pime

[2] Barnet-Uribe *Algebra y Geometrìa 2* Ed. Mac-Graw Hill

[3] Mabel Liliana Toquica *Aventura 9* Ed. Norma

[4] Soraya Padilla Chasing *Desafios 9* Ed. Norma